Massimi e minimi relativi

Definizioni

Definizione 1 (Massimi e minimi relativi). *Sia Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^d$ e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione.*

- *Diciamo che $X_0 \in \Omega$ è un punto di* MINIMO RELATIVO *di F in Ω, se esiste $B_r(X_0)$ tale che*

$$F(X_0) \le F(X) \qquad \textit{per ogni} \qquad X \in B_r(X_0) \cap \Omega\,.$$

  Se invece esiste $r > 0$ tale che

$$F(X_0) < F(X) \qquad \textit{per ogni} \qquad X \in B_r(X_0) \cap \Omega\,,\ X \neq X_0\,,$$

  diremo che X_0 è un MINIMO RELATIVO STRETTO.

- *Diciamo che $X_0 \in \Omega$ è un punto di* MASSIMO RELATIVO *di F in Ω, se esiste $B_r(X_0)$ tale che*

$$F(X_0) \ge F(X) \qquad \textit{per ogni} \qquad X \in B_r(X_0) \cap \Omega\,.$$

  Se invece esiste $r > 0$ tale che

$$F(X_0) > F(X) \qquad \textit{per ogni} \qquad X \in B_r(X_0) \cap \Omega\,,\ X \neq X_0\,,$$

  diremo che X_0 è un MASSIMO RELATIVO STRETTO.

- *Se $X_0 \in \Omega$ è un* PUNTO CRITICO *di F, ma non è un punto né di massimo né di minimo relativo, allora diremo che X_0 è un* PUNTO DI SELLA.

Definizione 2 (Punti critici). *Sia Ω un insieme aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su Ω. Diciamo che un punto $X_0 \in \Omega$ è un* PUNTO CRITICO *per F se $\nabla F(X_0) = 0$.*

Condizioni necessarie per l'esistenza di massimi e minimi relativi

Teorema 3. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 su Ω.*
Se F ha un minimo relativo nel punto $X_0 \in \Omega$, allora

$$\nabla F(X_0) = 0 \qquad e \qquad \nabla^2 F(X_0) \ge 0.$$

Se invece F ha un massimo relativo in X_0, allora

$$\nabla F(X_0) = 0 \qquad e \qquad \nabla^2 F(X_0) \le 0.$$

Dimostrazione. Per ogni vettore $X \in \mathbb{R}$ consideriamo la funzione $t \mapsto F(X_0 + tX)$. Se F ha un minimo relativo in X_0, allora la funzione (di una variabile reale) $t \mapsto F(X_0 + tX)$ ha un minimo relativo in $t = 0$. Di conseguenza,

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(X_0 + tX) = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} F(X_0 + tX) \ge 0,$$

ovvero

$$X \cdot \nabla F(X_0) = 0 \qquad \text{e} \qquad X \cdot \nabla^2 F(X_0) X \ge 0.$$

Siccome il vettore X è arbitrario abbiamo che

$$X \cdot \nabla^2 F(X_0) X \geq 0 \qquad \text{per ogni} \qquad X \in \mathbb{R}^d.$$

Di conseguenza, la matrice hessiana $\nabla^2 F(X_0)$ è semi-definita positiva. Infine, scegliendo $X = \nabla F(X_0)$ nella condizione al primo ordine

$$X \cdot \nabla F(X_0) = 0,$$

otteniamo che

$$|\nabla F(X_0)|^2 = 0,$$

ovvero che X_0 è un punto critico per F. □

Condizioni sufficienti per l'esistenza di massimi e minimi relativi

Teorema 4. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 su Ω.*

- *Se il punto $X_0 \in \Omega$ è tale che*

$$\nabla F(X_0) = 0 \qquad e \qquad \nabla^2 F(X_0) > 0,$$

allora $F : \Omega \to \mathbb{R}$ ha un punto di minimo relativo in X_0.

- *Se invece il punto $X_0 \in \Omega$ è tale che*

$$\nabla F(X_0) = 0 \qquad e \qquad \nabla^2 F(X_0) < 0,$$

allora $F : \Omega \to \mathbb{R}$ ha un punto di massimo relativo in X_0.

Dimostrazione. Supponiamo che

$$\nabla F(X_0) = 0 \qquad \text{e} \qquad \nabla^2 F(X_0) > 0.$$

Definiamo

$$M = \min_{\nu \in \partial B_1} \big\{ \nu \cdot \nabla^2 F(X_0) \nu \big\}.$$

Siccome il minimo è realizzato in un vettore ν_{min}, abbiamo che $M > 0$. Di conseguenza

$$X \cdot \nabla^2 F(X_0) X \geq M|X|^2 \qquad \text{per ogni} \qquad X \in \mathbb{R}^d.$$

Ora, per il Teorema di Taylor, esiste una funzione $\varepsilon : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ tale che

$$F(X + X_0) = F(X_0) + \frac{1}{2} X \cdot \nabla^2 F(X_0) X + \varepsilon(X) \qquad \text{dove} \qquad \lim_{X \to 0} \frac{\varepsilon(X)}{|X|^2} = 0.$$

Di conseguenza,

$$F(X + X_0) - F(X_0) \geq |X|^2 \left(\frac{M}{2} + \frac{\varepsilon(X)}{|X|^2} \right) \geq 0,$$

per $|X|$ abbastanza piccolo. □

Condizioni sufficienti per l'esistenza di punti di sella

Teorema 5. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 su Ω.*
Se il punto $X_0 \in \Omega$ è un punto critico (ovvero $\nabla F(X_0) = 0$) e la matrice $\nabla^2 F(X_0)$ è indefinita, allora $F : \Omega \to \mathbb{R}$ ha un punto di sella in X_0.

Dimostrazione. Siccome $\nabla^2 F(X_0)$ non è né semidefinita positiva né semidefinita negativa, esistono due autovettori (non-nulli) $V \in \mathbb{R}^d$ e $v \in \mathbb{R}^d$ di $\nabla^2 F(X_0)$ tali che

$$V \cdot \nabla^2 F(X_0)V > 0 \qquad \text{e} \qquad v \cdot \nabla^2 F(X_0)v < 0.$$

Di conseguenza, la funzione

$$t \mapsto F(X_0 + tV)$$

ha un minimo relativo stretto in $t = 0$, mentre la funzione

$$t \mapsto F(X_0 + tv)$$

ha un massimo relativo stretto in $t = 0$. X_0 è quindi un punto di sella. □

Teorema 6. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^2$, $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 su Ω e $X_0 \in \Omega$. Se*

$$\nabla F(X_0) \qquad e \qquad \det\big(\nabla^2 F(X_0)\big) < 0,$$

allora X_0 è un punto di sella per F.

Dimostrazione. Siano λ_1 e λ_2 i due autovalori (eventualmente uguali) della matrice simmetrica $\nabla^2 F(X_0)$. Siccome

$$\det\big(\nabla^2 F(X_0)\big) = \lambda_1 \lambda_2 < 0,$$

otteniamo che la matrice $\nabla^2 F(X_0)$ è indefinita. Applicando il teorema precedente, abbiamo la tesi. □

Osservazione 7. *Il teorema precedente non vale nelle dimensioni dispari.*
Per esempio, se n è dispari, allora la matrice hessiana $\nabla^2 F(0)$ della funzione

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad F(X) = -|X|^2,$$

ha determinante negativo, mentre l'origine è un punto di massimo globale per F in $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 8. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 su Ω e $X_0 \in \Omega$. Dimostrare che se n è pari,*

$$\nabla F(X_0) = 0 \qquad e \qquad \det\big(\nabla^2 F(X_0)\big) < 0,$$

allora X_0 è un punto di sella per F.

Esempi

Possiamo riassumere i risultati delle sezioni precedenti come segue.
Supponiamo che Ω sia aperto, $F : \Omega \to \mathbb{R}$ sia una funzione di classe C^2 e $X_0 \in \Omega$ sia un punto critico per F (ovvero $\nabla F(X_0) = 0$). Allora:

- se $\nabla^2 F(X_0)$ è definita positiva, allora F ha un punto di minimo relativo in X_0;
- se $\nabla^2 F(X_0)$ è definita negativa, allora F ha un punto di massimo relativo in X_0;
- se $\nabla^2 F(X_0)$ è indefinta, allora F ha un punto di sella in X_0.

Se invece $\nabla^2 F(X_0)$ è solo semi-definita positiva o semi-definita negativa, l'analisi al secondo ordine non è sufficiente per determinare il comportamento locale di F in un intorno di X_0.

Esempio 9. *La funzione*

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad F(x, y) = x^4 + y^4$$

ha matrice hessiana nulla in $(0, 0)$, e $(0, 0)$ è un punto di minimo per F.

Esempio 10. *La funzione*

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad F(x, y) = -x^4 - y^4$$

ha matrice hessiana nulla in $(0, 0)$, e $(0, 0)$ è un punto di massimo per F.

Esempio 11. *La funzione*

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad F(x, y) = x^4 - y^4$$

ha matrice hessiana nulla in $(0, 0)$, e $(0, 0)$ è un punto di sella per F.

Proprietà delle matrici hessiane in $\mathbb{R}^2$

Simmetria

Dati un aperto Ω in $\mathbb{R}^2$ e una funzione $F : \Omega \to \mathbb{R}$ di classe C^2 su Ω, la matrice hessiana $\nabla^2 F$ è data da

$$\nabla^2 F = \begin{pmatrix} \partial_{xx}F & \partial_{xy}F \\ \partial_{yx}F & \partial_{yy}F \end{pmatrix}$$

Osserviamo che siccome le derivate parziali seconde di F sono continue (per definizione di $C^2(\Omega)$), il teorema di Schwarz implica che

$$\partial_{xy}F = \partial_{yx}F \qquad \text{su} \qquad \Omega.$$

Quindi, abbiamo ottenuto che:

> se $F \in C^2(\Omega)$, allora la matrice $\nabla^2 F$ è simmetrica.

Analisi delle matrici hessiane

In ogni punto $X_0 = (x_0, y_0)$ la matrice hessiana $\nabla^2 F(x_0, y_0)$ può essere:

- *definita positiva;*
- *definita negativa;*
- *semi-definita positiva, ma non definita positiva;*
- *semi-definita negativa, ma non definita negativa;*
- *indefinita* (ovvero né semi-definita positiva, né semi-definita negativa).

Osserviamo che:

> in generale, per determinare il carattere della matrice $\nabla^2 F$ in un determinato punto (x_0, y_0), non basta studiare il segno delle derivate parziali $\partial_{xx}F(x_0, y_0)$ e $\partial_{yy}F(x_0, y_0)$.

Esempio 12. *Consideriamo la funzione*

$$F(x, y) = x^2 + y^2 + 4xy.$$

In ogni punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, possiamo calcolare

$$\partial_{xx}F = 2 \qquad e \qquad \partial_{yy}F = 2.$$

Quindi, le derivate parziali $\partial_{xx}F$ e $\partial_{yy}F$ sono strettamente positive, ma la matrice hessiana $\nabla^2 F$ non è definita positiva. Infatti, l'origine $(0, 0)$ non è un punto di minimo locale. Per esempio, la funzione

$$t \mapsto F(t, -t) = -2t^2 \qquad per \qquad t \in \mathbb{R}$$

ha un punto di massimo stretto in $t = 0$.

In generale, per stabilire il segni di una matrice hessiana (di una funzione definita in $\mathbb{R}^2$) useremo il teorema seguente.

Teorema. *Sia* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ *una matrice reale simmetrica* 2×2. *Allora,*

(1) A *è semi-definita positiva* $\Leftrightarrow$ $a + c \geq 0$, $\det A = 0$.

(2) A *è definita positiva* $\Leftrightarrow$ $a + c > 0$, $\det A > 0$.

(3) A *è semi-definita negativa* $\Leftrightarrow$ $a + c \leq 0$, $\det A \geq 0$.

(4) A *è definita negativa* $\Leftrightarrow$ $a + c < 0$, $\det A > 0$.

(5) A *è indefinita* $\Leftrightarrow$ $\det A < 0$.

Esercizi

Esercizio 13. *Per ciascuna delle funzioni* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

- *determinare i punti critici di* F*;*
- *in ciascuno dei punti critici di* F *dire se la matrice hessiana* $\nabla^2 F$ *è:*
  - *definita positiva;*
  - *semi-definita positiva, ma non definita positiva;*
  - *definita negativa;*
  - *semi-definita negativa, ma non definita negativa;*
  - *indefinita.*
- *determinare:*
  - *i minimi relativi di* F*;*
  - *i massimi relativi di* F*;*
  - *i punti di sella di* F.

(1) $F(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x + 4y$

(2) $F(x, y) = x^2 - y^2 + 4xy + 20x$

(3) $F(x, y) = x^2 - y^2 + xy + 20x + 5y + 3$

(4) $F(x, y) = x^2 + 3y^2 + 5xy + 20x + 5y + 3$

(5) $F(x, y) = x^2 + 3y^2 + 3xy + 20x + 5y + 3$

(6) $F(x, y) = 2x^2 + y^2 + 3xy + 20x + 5y + 3$

(7) $F(x, y) = -2x^2 - y^2 + 2xy + 20x + 5y + 3$

(8) $F(x, y) = e^{xy+y^2}$.

Dagli appelli precedenti

Esercizio 14 (Gennaio 2021 - versione 1). *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = ye^{2x} - \frac{8y}{e^x} + y^3$$

La funzione F *ha un unico punto critico in* $\mathbb{R}^2$ *che chiameremo* $A_0 = (x_0, y_0)$.

(a) *Trovare le coordinate di* A_0.

(b) *Calcolare la matrice Hessiana* $\nabla^2 F$ *di* F *in* A_0.

(c) *Dire se* $\nabla^2 F(A_0)$ *è definita positiva, definita negativa, semi-definita positiva, semi-definita negativa, oppure indefinita.*

(d) *Che cosa si può dire sul comportamento locale della funzione nel punto* A_0*?*

Esercizio 15 (Gennaio 2021 - versione 2). *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = x^2y + xy - y^2x$$

Sia $A_0 = (x_0, y_0)$ *l'unico punto critico di* F *fra i punti*

$$(1,0),\ (-1,0),\ (\tfrac{1}{2},0),\ (2,0),\ (-2,0)\ \text{e}\ (-\tfrac{1}{2},0).$$

Trovare (x_0, y_0) *e dire quali fra le affermazioni seguenti sono vere.*

(a) *Trovare le coordinate di* A_0.

(b) *Calcolare la matrice Hessiana* $\nabla^2 F$ *di* F *in* A_0.

(c) *Dire se* $\nabla^2 F(A_0)$ *è definita positiva, definita negativa, semi-definita positiva, semi-definita negativa, oppure indefinita.*

(d) *Che cosa si può dire sul comportamento locale della funzione nel punto* A_0*?*

Esercizio 16 (Febbraio 2021 - versione 1). *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = x^3 - \frac{1}{3}y^3 + xy - x^2$$

Sia $A_0 = (x_0, y_0)$ *l'unico punto critico di* F *fra i punti*

$$(1,1),\ (1,-1)\ \text{e}\ (-1,1).$$

(1) Trovare (x_0, y_0).

(2) Calcolare la matrice hessiana $\nabla^2 F(x_0, y_0)$ *nel punto* (x_0, y_0).

(3) Stabilire se nel punto (x_0, y_0) *la matrice hessiana di* $\nabla^2 F$ *è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa, oppure indefinita.*

(4) Usando il punto precedente, determinare il comportamento della funzione F *in un intorno del punto* (x_0, y_0).

Esercizio 17 (Febbraio 2021 - versione 2). *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - xy^2 + y^2$$

Sia $A_0 = (x_0, y_0)$ *l'unico punto critico di* F *fra i punti*

$$(1, 1),\ (-1, 1)\ \text{e}\ (-1, -1).$$

(1) Trovare (x_0, y_0).

(2) Calcolare la matrice hessiana $\nabla^2 F(x_0, y_0)$ *nel punto* (x_0, y_0).

(3) Stabilire se nel punto (x_0, y_0) *la matrice hessiana di* $\nabla^2 F$ *è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa, oppure indefinita.*

(4) Usando il punto precedente, determinare il comportamento della funzione F *in un intorno del punto* (x_0, y_0).

Esercizio 18 (Aprile 2021 - versione 1). *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x, y) = x^2y^2 - x^2 + 2xy + 2x$$

Sia $A_0 = (x_0, y_0)$ *l'unico punto critico di* F *fra i punti*

$$(1, 0),\ (1, 1)\ \text{e}\ (1, -1).$$

(1) Trovare (x_0, y_0).

(2) Calcolare la matrice hessiana $\nabla^2 F(x_0, y_0)$ *nel punto* (x_0, y_0).

(3) Stabilire se nel punto (x_0, y_0) *la matrice hessiana di* $\nabla^2 F$ *è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa, oppure indefinita.*

(4) Usando il punto precedente, determinare il comportamento della funzione F *in un intorno del punto* (x_0, y_0).

Esercizio 19 (Aprile 2021 - versione 2). *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x, y) = x^2y^2 - 2xy$$

Sia $A_0 = (x_0, y_0)$ *l'unico punto critico di* F *fra i punti*

$$(1, 1),\ (-1, 1)\ \text{e}\ (1, 0).$$

(1) Trovare (x_0, y_0).

(2) Calcolare la matrice hessiana $\nabla^2 F(x_0, y_0)$ *nel punto* (x_0, y_0).

(3) Stabilire se nel punto (x_0, y_0) *la matrice hessiana di* $\nabla^2 F$ *è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa, oppure indefinita.*

(4) Usando il punto precedente, determinare il comportamento della funzione F *in un intorno del punto* (x_0, y_0).

Esercizio 20 (Giugno 2021). *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = x^3 + xy - y^2 \,.$$

La funzione F ha esattamente due punti critici in $\mathbb{R}^2$: $A_0 = (0,0)$ e $A_1 = (x_1, y_1)$.

(a) *Calcolare la matrice Hessiana $H = \nabla^2 F$ di F in A_0.*

(b) *Dire se la matrice Hessiana $\nabla^2 F(A_0)$ è definita positiva, definita negativa, semi-definita positiva, semi-definita negativa, oppure indefinita.*

(c) *Che cosa si può dire sul comportamento locale della funzione nel punto A_0, usando il risultato del punto precedente?*

(d) *Trovare le coordinate (x_1, y_1) del punto critico A_1.*

(e) *Calcolare la matrice Hessiana $H = \nabla^2 F$ di F in A_1.*

(f) *Dire se la matrice Hessiana $\nabla^2 F(A_1)$ è definita positiva, definita negativa, semi-definita positiva, semi-definita negativa, oppure indefinita.*

(g) *Che cosa si può dire sul comportamento locale della funzione nel punto A_1, usando il risultato del punto precedente?*

Esercizio 21 (Giugno 2021). *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = x^4 + x^2 y - y^3 \,.$$

La funzione F ha esattamente tre punti critici in $\mathbb{R}^2$:

$$A_0 = (0,0) \ , \quad A_1 = (x_1, y_1) \quad e \quad A_2 = (x_2, y_2).$$

(a) *Trovare le coordinate dei punti critici A_1 e A_2.*

(b) *Calcolare la matrice Hessiana $H = \nabla^2 F$ di F in A_1 e A_2.*

(c) *Per ciascuna delle metrici $\nabla^2 F(A_1)$ e $\nabla^2 F(A_2)$ dire se è definita positiva, definita negativa, semi-definita positiva, semi-definita negativa, oppure indefinita.*

(d) *Che cosa si può dire sul comportamento locale della funzione nel punti A_1 e A_2, usando il risultato del punto precedente?*

Esercizio 22 (Luglio 2021). *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = x^2 y - y^2 x + 3x^2 \,.$$

La funzione F ha esattamente due punti critici in $\mathbb{R}^2$: $A_1 = (x_1, y_1)$ e $A_2 = (x_2, y_2)$.

(a) *Trovare le coordinate dei punti critici A_1 e A_2.*

(b) *Calcolare la matrice Hessiana $H = \nabla^2 F$ di F in A_1 e A_2.*

(c) *Per ciascuna delle matrici $\nabla^2 F(A_1)$ e $\nabla^2 F(A_2)$ dire se è definita positiva, definita negativa, semi-definita positiva, semi-definita negativa, oppure indefinita.*

(d) *Che cosa si può dire sul comportamento locale della funzione nel punti A_1 e A_2, usando il risultato del punto precedente?*

Esercizio 23 (Settembre 2021). *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = x^2y^2 - 2y^2x + x\,.$$

La funzione F ha esattamente due punti critici in $\mathbb{R}^2$: $A_1 = (x_1, y_1)$ e $A_2 = (x_2, y_2)$.

(a) *Trovare le coordinate dei punti critici A_1 e A_2.*

(b) *Calcolare la matrice Hessiana $H = \nabla^2 F$ di F in A_1 e A_2.*

(c) *Per ciascuna delle matrici $\nabla^2 F(A_1)$ e $\nabla^2 F(A_2)$ dire se è definita positiva, definita negativa, semi-definita positiva, semi-definita negativa, oppure indefinita.*

(d) *Che cosa si può dire sul comportamento locale della funzione nei punti A_1 e A_2 usando il risultato del punto precedente?*